AULA

8

Variação de parâmetros

META:

Descrever o método conhecido por variação de parâmetros usado para resolver equações diferenciais ordinárias lineares não homogêneas. Além de apresentar o oscilador harmônico.

OBJETIVOS:

Ao fim da aula os alunos deverão ser capazes de:

Aplicar eficazmente o método de variação de parâmetros.

Resolver problemas referentes ao oscilador harmônico.

PRÉ-REQUISITOS

Os conhecimentos da aula 6.

8.1 Introdução

Caros alunos essa é a nossa oitava aula. Na aula de hoje apresentaremos mais um método de resolução de equações lineares. Esse método é destinado a resolver equações lineares não homogênea, ele é um pouco mais abragente do que o aprendido na aula anterior pois possibilita resolver equações lineares não homogêneas com coeficientes não constantes quando se conhece uma solução geral da equação homogênea associada.

8.2 Resolvendo equações lineares não homogêneas.

O método que apresentaremos aqui é conhecido por variação de parâmetros.
Considere a E.D.O. linear

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

onde $a_n(x), \cdots, a_0(x)$ e $g(x)$ são funções contínuas numm intervalo I, com $a_n(x) \neq 0$ em i. Quando $n = 1$ obtemos

$$y' + P(x)y = f(x),$$

onde $P(x) = a_0(x)/a_1(x)$ e $f(x) = g(x)/a_1(x)$. Vimos que a E.D.O. homogênea associada $y' + P(x)y = 0$ tem solução geral dada por $y_c(x) = c_1y_1(x) = c_1e^{-\int P(x)dx}$. Para acharmos $y_p(x)$ usaremos o método de variação de parâmetros, o qual consiste em encontrar uma função $u_1(x)$ tal que $y_p(x) = u_1(x)y_1(x)$, onde y_1 é solução da E.D.O. homogênea associada, seja uma solução particular de $y' + P(x)y = f(x)$.

Substituindo $y_p(x) = u_1(x)y_1(x)$ na E.D.O. temos

$$\frac{d}{dx}[u_1y_1] + P(x)[u_1y_1] = f(x) \Leftrightarrow y_1u_1' + u_1[y_1' + P(x)y_1] = f(x),$$

Como y_1 é solução da E.D.O.homogênea a última igualdade se reduz a

$$y_1u_1' = f(x) \Rightarrow u_1(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx.$$

Assim,

$$y_p(x) = y_1 \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx.$$

Logo, a solução geral é

$$y(x) = c_1e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \int f(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Observe que essa expressão é a mesma obtida quando resolvemos, na aula 4, a E.D.O. linear de primeira ordem utilizando fator integrante.

Quando $n = 2$, temos

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x),$$

onde $P(x) = a_1(x)/a_2(x)$, $Q(x) = a_0(x)/a_2(x)$ e $f(x) = g(x)/a_2(x)$. Suponha que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formam um conjunto fundamental para a E.D.O. homogênea associada

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Assim, procedendo analogamente ao caso anterior, para acharmos uma solução particular, y_p, da E.D.O. não homogênea tentemos encontrar funções $u_1(x)$, $u_2(x)$ tais que $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) +$

$u_2(x)y_2(x)$ seja a solução particular procurada da E.D.O. não homogênea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$. Derivando y_p, obtemos

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2$$

e

$$y_p'' = u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + 2u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2y_2''.$$

Sustituindo essas expressões na E.D.O. não homogênea, temos que

$$y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p = f(x)$$

é equivalente a

$$u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + 2u_2'y_2' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + u_2y_2'' + P(x)[u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2]$$

$$+Q(x)[u_1y_1 + u_2y_2] = f(x).$$

E, organizando, temos

$$u_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + u_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] + P(x)[u_1'y_1 + u_2'y_2]$$

$$+u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_2''y_2 + u_2'y_2' + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Finalmente,

$$P(x)[u_1'y_1 + u_2'y_2] + \frac{d}{dx}[u_1'y_1 + u_2'y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \tag{8.47}$$

Observe que para obtermos a última igualdade usamos o fato de y_1 e y_2 serem soluções da E.D.O. homogênea associada, ou seja $y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0$ e $y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$.

Como queremos achar duas funções desconhecidas u_1 e u_2 precisamos de duas equações que as relacionem. Observe que podemos obter essas duas equações tomando como hipótese que

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0.$$

Dessa maneira, a equação (8.47) se reduz a

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

Portanto para acharmos as duas funções u_1 e u_2 basta resolver o sistema

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$$

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x).$$

O sistema acima pode ser resolvido pela regra de Cramer, a qual nos dá

$$u_1' = \frac{W_1}{W}, u_2' = \frac{W_2}{W},$$

onde W é o Wronskiano das funções y_1 e y_2, ou seja

$$W = det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}.$$

E,

$$W_1 = det \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{pmatrix}, \ W_2 = det \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{pmatrix}.$$

Integrando as expressões obtidas para u_1' e u_2', obtemos as funções u_1, u_2 procuradas.

Exemplo 8.1. Resolva a E.D.O.

$$y'' + 4y = sec(x), -\pi/2 < x < \pi/2.$$

Lembre que antes de qualquer cálculo a equação deve ser colocada na forma padrão, como esta já está na forma padrão, prossigamos com os cálculos.

Sabemos que uma solução geral para essa E.D.O. é da forma

$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, onde y_c é a solução geral da E.D.O. homogênea associada e y_p uma solução particular da E.D.O. não homogênea dada. Começemos com a parte homogênea.

Uma vez que a E.D.O. homogênea associada $y'' + 4y = 0$ tem coeficientes constantes, podemos resolvê-la achando as raízes da equação auxiliar

$$m^2 + 4 = 0.$$

Vê-se que as raízes dessa equação auxiliar são complexas, as quais são $m_1 = 2i, m_2 = -2i$. Assim, a solução geral para a E.D.O. homogênea é

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 sen\, 2x.$$

Para resolvermos a parte não homogênea, como a função independente $\sec x$ não é uma função polinomial nem nenhum dos tipos exigidos pelo método dos coeficientes a determinar, temos que usar, neste caso, variação de parâmetros. Dessa maneira, procedamos como foi explicado acima. Suponha que a solução particular procurada seja da forma $y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$, onde y_1, y_2 são as funções que aparecem na solução geral da E.D.O. homogênea, a saber $y_1 = \cos 2x$ e $y_2 = sen\, 2x$. Assim, derivando y_p e substituindo na equação, obtemos o seguinte sistema

$$u_1' \cos 2x + u_2' sen\, 2x = 0$$

$$-2u_1' sen\, 2x + 2u_2' \cos 2x = secx.$$

Daí,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} = \frac{-sen\, 2x \sec x}{2}, \; u_2' = \frac{W_2}{W} = \frac{\cos 2x \sec x}{2}$$

uma vez que

$$W_1 = det\begin{pmatrix} 0 & sen\,2x \\ \sec x & 2\cos 2x \end{pmatrix} = -sen\,2x \sec x,$$

$$W_2 = det\begin{pmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2sen\,2x & \sec x \end{pmatrix} = \cos 2x \sec x$$

e

$$W = det\begin{pmatrix} \cos 2x & sen\,2x \\ -2sen\,2x & 2\cos 2x \end{pmatrix} = 2\cos^2 2x + 2sen^2\,2x = 2.$$

Portanto,

$$u_1 = -\int \frac{sen\,2x \sec x}{2}dx = -\int sen\,x dx = \cos x$$

e

$$u_2 = \int \frac{\cos 2x \sec x}{2}dx = \int \frac{1}{2}\cos x dx - \int \frac{1}{2}\frac{sen^2\,x}{\cos x}dx = \frac{1}{2}[2sen\,x - ln|\sec x + \tan x|].$$

Portanto, uma solução geral da E.D.O. dada é

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 sen\,2x + \cos 2x \cos x + sen\,2x[sen\,x - \frac{1}{2}ln|\sec x + \tan x|].$$

8.2.1 Equações de ordem superior

O método também se aplica a E.D.O. linear de ordem superior

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x).$$

Se $y_c(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ é a solução geral para a E.D.O. homogênea associada, então $y_p(x) = u_1y_1 + \cdots + u_ny_n$. As funções $u_i, i = 1, \cdots, n$ são obtidas integrando as soluções do sistema

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n &= 0 \\ u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' &= 0 \\ u_1'y_1'' + \cdots + u_n'y_n'' &= 0 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} &= f(x). \end{aligned}$$

Pela regra de Cramer, temos que

$$u_i' = \frac{W_i}{W}, i = 1, \cdots, n$$

onde

$$W_i = det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & 0 & \cdots & y_n \\ y_1' & & 0 & & y_n' \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & f(x) & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, n.$$

$$\uparrow$$

i- ésima coluna

e,

$$W = det \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_i & \cdots & y_n \\ y_1' & & y_i' & & y_n' \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_i^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, n.$$

Exemplo 8.2. Resolva a E.D.O.

$$y''' + 4y' = \sec 2x.$$

Uma vez que a E.D.O. está na forma padrão, procedamos como no exemplo anterior, calculemos uma solução geral para a E.D.O. homogênea associada $y''' + 4y' = 0$. A equação auxiliar nesse caso é

$$m^3 + 4m = 0,$$

cujas raízes são $m_1 = 0, m_2 = 2i, m_3 = -2i$. Assim, a solução geral é dada por

$$y_c(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 sen\, 2x.$$

E por variação de parâmetros tentemos obter uma solução particular y_p para essa E.D.O.. Suponha que $y_p = u_1y_1+u_2y_2+u_3y_3$, onde $y_1 = 1, y_2 = \cos 2x, y_3 = sen\,2x$. Neste caso, temos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{array}{ll} u_1' + u_2' \cos 2x + u_3' sen\,2x & = 0 \\ 0 - 2u_2' sen\,2x + 2u_3' \cos 2x & = 0 \\ 0 - 4u_2' \cos 2x - 4u_3' sen\,2x & = \sec 2x \end{array}.$$

Assim, uma vez que

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos 2x & sen\,2x \\ 0 & -2sen\,2x & 2\cos 2x \\ \sec 2x & -4\cos 2x & -4sen\,2x \end{vmatrix}, W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & sen\,2x \\ 0 & 0 & 2\cos 2x \\ 0 & \sec 2x & -4sen\,2x \end{vmatrix},$$

e,

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & 0 \\ 0 & -2sen\,2x & 0 \\ 0 & -4\cos 2x & \sec 2x \end{vmatrix}, W = \begin{vmatrix} 1 & \cos 2x & sen\,2x \\ 0 & -2sen\,2x & 2\cos 2x \\ 0 & -4\cos 2x & -4sen\,2x \end{vmatrix}$$

temos que

$$u_1' = \frac{\sec 2x}{4}, u_2' = -1/4, u_3' = -\frac{tan\,2x}{4}.$$

Integrando, obtemos

$$u_1 = \frac{1}{8} ln|\sec 2x + tan\,2x|,\ u_2 = -x/4,\ u_3 = \frac{1}{8} ln|\cos 2x|.$$

Assim, uma solução geral da E.D.O. dada é

$$y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 sen\,2x + \frac{1}{8} ln|\sec 2x + tan\,2x| - \frac{x}{4}\cos\ 2x + \frac{1}{8} sen\,(2x) ln|\cos 2x|.$$

8.3 Modelagem matemática em E.D.O. lineares de ordem superior com coeficientes constantes

8.3.1 O oscilador harmônico

Estudamos na aula 1 que a equação diferencial que modela o movimento de um corpo de massa m presso a uma mola considerando a inexistência de forças de amortecimento e de forças externas é

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x,$$

onde k é a constante de elasticdade da mola e m é a massa do corpo presso a mola. Aqui trataremos desse problema com mais detalhes.

Oscilador harmônico livre não amortecido.

Consideremos um corpo de massa m presso a uma mola, cuja constante de elasticidade é k, livre de amortecimentos e forças externas. Se o corpo ao ser presso na mola deslocou-a s unidades de comprimento, segundo a lei de Hooke sabemos que a mola exercerá uma força restauradora proporcional ao deslocamento sofrido e oposta ao mesmo, ou seja, $F_{rest} = ks$. Ao deslocar a mola s unidades de comprimento o corpo se encontra parado e dizemos que o sistema massa-mola se encontra em equilíbrio, ou seja, a força peso é igual a força restauradora da mola, $mg = ks$.
A força exercida pela mola terá sinal negativo, pois ela age no sentido oposto ao movimento. Convencionaremos que os deslocamentos medidos abaixo da posição de equilíbrio serão positivos e os acima serão negativo, como mostra a figura abaixo.
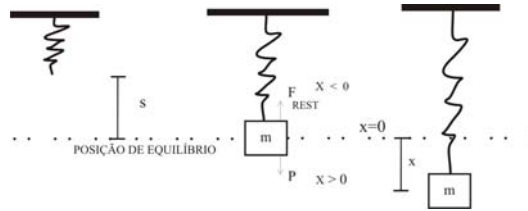
Figura 8.1: Sistema massa-mola.

Num certo instante de tempo t o corpo é puxado para baixo distendendo a mola $x(t)$ unidades de comprimento, a qual foi solta em seguida. Pela segunda lei de Newton esse movimento obedece a seguinte equação $mg - k(s + x) = m\ddot{x}$, onde mg é a força peso e $k(s + x)$ é a força restauradora da mola quando esta é distendida de s unidades (quando o corpo foi presso à mola, lembre que $ks = mg$) mais x unidades quando o corpo foi puxado para baixo. Assim, obtemos a seguinte equação diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + s) = -kx$$

ou podemos escrever a equação que modela o movimento do corpo livre de amortecimento e forças externas da seguinte maneira

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0, \tag{8.48}$$

onde $w^2 = k/m$. Esse movimento é chamado **movimento harmônico simples ou movimento livre não amortecido**. Observe que a equação (8.48) é uma equação de segunda ordem do tipo linear homogênea. Assim, ao resolvermos a equação auxiliar encontramos duas raízes complexas dadas por $m_1 = wi, m_2 = -wi$. Portanto, a solução geral de (8.48) é

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 sen\, wt,\ w = \sqrt{k/m}. \tag{8.49}$$

Observe que $x(t)$ é uma função periódica, de período $T = \frac{2\pi}{w}$ e, consequentemente, sua frequencia é $f = 1/T = \frac{w}{2\pi}$. (observe que como $w^2 = k/m$ deveríamos ter $w = \pm\sqrt{k/m}$ matematicamente falando, contudo w tem um significado físico e, por isso, adotaremos w sempre positivo.)

Se $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$ podemos facilmente traçar o gráfico da solução obtida e, dessa maneira, podemos extrair mais informações sobre a solução. Contudo, se $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$ extrair algumas informações se torna um pouco mais difícil. A fim de contornar tal fato, podemos escrever a solução (8.49) de uma outra forma. Dessa maneira, afirmamos que a equação (8.49) pode ser escrita na forma

$$x(t) = Asen\,(wt + w_0), \tag{8.50}$$

onde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $sen\,w_0 = \frac{c_1}{A}$, $\cos w_0 = \frac{c_2}{A}$. De fato, sabemos que $Asen\,(wt + w_0) = A[sen\,wt \cos w_0 + sen\,w_0 \cos wt]$. Assim, a fim de que

$$c_1 \cos wt + c_2 sen\,wt = A[sen\,wt \cos w_0 + sen\,w_0 \cos wt]$$

temos

$$A \cos w_0 = c_2, \quad Asen\,w_0 = c_1.$$

Logo, da relação acima concluímos que as constantes A e w_0 são tais que $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ e $sen\,w_0 = \frac{c_1}{A}$, $\cos w_0 = \frac{c_2}{A}$.

Amplitude de movimento do corpo presso à mola é a maior distância do corpo a sua posição de equilíbrio.

Portanto, da expressão (8.50) é fácil ver que a amplitude de movimento do corpo presso à mola é A. Concluímos que o movimento de um corpo de massa m presso a uma mola de constante elástica k livre de amortecimento e sem força externa é periódico, de período $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ e a amplitude máxima desse corpo é

$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, ou seja, um corpo nessas condições tenderá a oscilar indefinidamente periodicamente. Abaixo apresentamos o gráfico que descreve o movimento do corpo ao longo do tempo, onde a amplitude de movimento é 5 e período igual a 2π. O gráfico da direita está defasado 2 unidades de tempo, ou seja, $w_0 = 2$. No gráfico da esquerda $w_0 = 0$
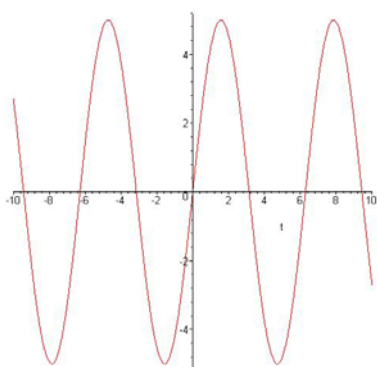
Figura 8.2: Movimento livre não amortecido

.
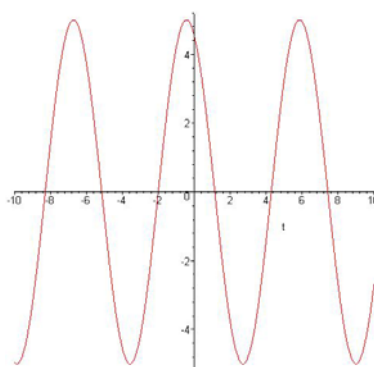
Figura 8.3: Movimento livre não amortecido com defasagem de 2 unidades de tempo.

Considerando o gráfico da esquerda como exemplo, observe que os pontos onde o gráfico corta o eixo horizontal (eixo do tempo t) nos mostram os momentos em que o corpo de massa m passa pela posição de equilíbrio, $x = 0$, os pontos do gráfico que estão abaixo do eixo t (ordenada negativa) são os pontos cujas ordenadas nos dão a posição do corpo acima da posição de equilíbrio, são as posições correspondentes a compressão da mola e, os pontos do gráfico que estão acima do eixo t (ordenada positiva) são os pontos cujas as ordenadas nos dão a posição do corpo abaixo da

posição de equilíbrio, são as posições correspondentes à distenção da mola.

Oscilador harmônico livre amortecido.

Nesse caso consideramos a situação anterior sujeita a um amortecimento seja ele causado pelo vento, pelo atrito com alguma superfície ou por outro motivo qualquer. Na física as forças de amortecimento que atuam em um corpo são, em geral, proporcionais a uma potência da velocidade instantânea. Aqui, consideraremos que a força de amortecimento é proporcional a potência unitária da velocidade, ou seja, a força de amortecimento tem a expressão $\gamma\frac{dx}{dt}$, onde γ é uma constante. Assim, a equação de movimento para esse caso é

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt}.$$

(O sinal negativo na força de amortecimento ou atrito deve-se ao fato que forças de atrito são forças contrárias ao movimento.) Assim, organizando a equação acima obtemos a seguinte equação, a qual modela o movimento do corpo com amortecimento mas livre de forças externas

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + w^2x = 0, 2\delta = \gamma/m,\ w^2 = k/m. \tag{8.51}$$

Esse movimento é denominado por **movimento livre amortecido**. Observe que essa E.D.O. é também uma E.D.O. linear homogênea e, desta maneira, sua solução geral é obtida por meio do cálculo das raízes da equação auxiliar

$$m^2 + 2\delta m + w^2 = 0,$$

a qual nos dá $m_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - w^2}$ e $m_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - w^2}$. Assim, teremos três tipos de solução, a depender se $\delta^2 - w^2$ é maior, igual ou menor do que zero. Comecemos com o caso $\delta^2 - w^2 > 0$.

CASO I: $\delta^2 - w^2 > 0$

Se $\delta^2 - w^2 > 0$ temos $m_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - w^2}$ e $m_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - w^2}$ números reais e, nesse caso, pelo exposto na aula anterior, a solução geral é dada por

$$x(t) = e^{-\delta t}[c_1 e^{\sqrt{\delta^2 - w^2}t} + c_2 e^{-\sqrt{\delta^2 - w^2}t}].$$

Esse caso é chamado movimento livre superamortecido.
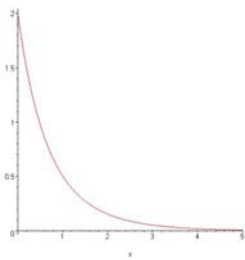
Figura 8.4: Movimento livre superamortecido $y(x) = e^{-x} + e^{-2x}$.
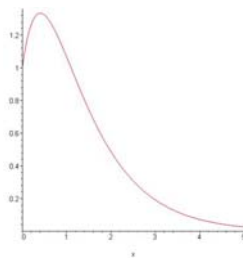
Figura 8.5: Movimento livre superamortecido $y(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$.
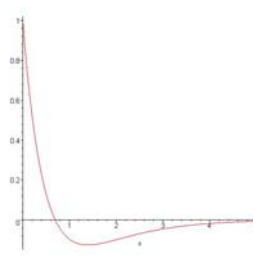
Figura 8.6: Movimento livre superamortecido $y(x) = -e^{-x} + 2e^{-2x}$.

CASO II:$\delta^2 - w^2 = 0$

Se $\delta^2 - w^2 = 0$, temos $m_1 = m_2 = -\delta$. Assim, pelo conteúdo da aula anterior, a solução geral é

$$x(t) = c_1 e^{-\delta t} + c_2 t e^{-\delta t}.$$

Esse caso é chamado **movimento criticamente amortecido**.
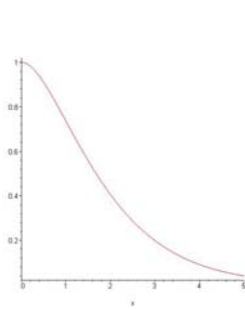
Figura 8.7: Movimento livre criticamente amortecido $y(x) = e^{-x} + xe^{-x}$.
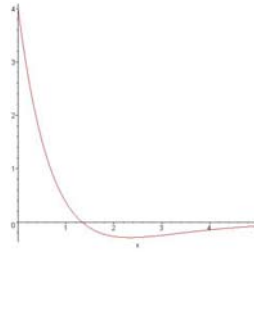
Figura 8.8: Movimento livre criticamnete amortecido $y(x) = 4e^{-x} - 3xe^{-x}$.
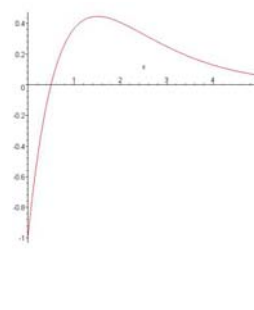
Figura 8.9: Movimento livre criticamente amortecido $y(x) = -e^{-x} + 2xe^{-x}$.

E, finalmente

CASO III:$\delta^2 - w^2 < 0$

Se $\delta^2 - w^2 < 0$, temos $m_1 = -\delta + i\sqrt{w^2 - \delta^2}, m_2 = \delta - i\sqrt{w^2 - \delta^2}$. Assim, pelo conteúdo da aula anterior, a solução geral é

$$x(t) = e^{-\delta t}[c_1 \cos \sqrt{w^2 - \delta^2}t + c_2 sen \sqrt{w^2 - \delta^2}t].$$

Esse caso é chamado **movimento subamortecido**.
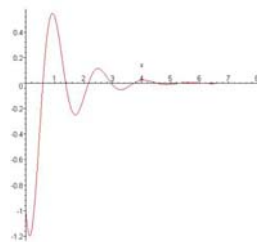
Figura 8.10: Mov. livre subamortecido $y(x) = e^{-x}[-\cos 4x - sen\, 4x]$.
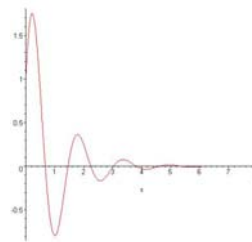
Figura 8.11: Mov. livre subamortecido $y(x) = e^{-x}[\cos 4x + 2sen\, 4x]$.

Oscilador harmônico forçado.

Consideremos agora uma força externa agindo sobre o corpo de massa m. Aqui cabe observar que se esta força for a favor do movimento ela entrará nas equações com sinal positivo, caso contrário o sinal será negativo. Podemos, por exemplo, pensar nessa força externa como sendo uma força periódica que uma pessoa faz puxando o corpo para baixo toda vez que ele passar pela posição de equilíbrio. De qualquer forma, seja qual for a força externa exercida, a equação diferencial de movimento do corpo se considerarmos além da força externa, a força de amortecimento será $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + f(t)$. Organizando a equação, obtemos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + w^2x = F(t),$$

onde $2\delta = \gamma/m$, $w^2 = k/m$, $F(t) = f(t)/m$. Se o sistema sofrer a ação de uma força externa, mas for livre de forças de amortecimento, teremos a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w^2x = F(t).$$

Note que as equações acima são do tipo linear de segunda ordem não homogênea. Assim, se a função $F(t)$ for do tipo polinomial, exponencial ou das formas $sen\, ax, \cos ax$ ou combinação desses, podemos usar coeficientes a determinar para achar uma solução geral, caso contrário a única opção que resta é tentarmos resolver por variação de parâmetros.

8.4 Conclusão

Da aula de hoje, concluímos que podemos resolver quaisquer equações diferenciais lineares não homogêneas, bastando para isso conhecermos a solução geral da equação homogênea associada. Para acharmos a solução particular da E.D.O. não homogênea usamos um método conhecido por variação de parâmetros.

RESUMO

..

Na aula de hoje aprendemos o método conhecido por variação de parâmetros, cujo objetivo é encontrar uma solução particular da E.D.O. linear não homogênea. As equações lineares estão ligadas a vários problemas reais, nesta aula também estudamos detalhadamente o oscilador harmônico como uma aplicação para tais equações.

PRÓXIMA AULA

..

Até agora só aprendemos a resolver E.D.O.'s lineares homogêneas com coeficientes constantes. Em nossa próxima aula veremos como resolver um tipo especial de equações lineares com coeficientes variáveis: a Equação de Cauchy-Euler.

ATIVIDADES

..

Atividade. 8.1. Resolva cada equação usando variação de parâmetros

a) $y'' + y = secx$

b)$y'' + y = cos^2 x$

c) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

d) $y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

e) $y''' + y' = tgx.$

Atividade. 8.2. Uma mola está presa ao teto. Quando uma massa de 30kg é atada à mola, esta distende-se em 12 cm. A

massa é removida e uma pessoa segura a extremidade da mola e começa a balançar para cima e para baixo com um período de 1 segundo. Qual o peso dessa pessoa?

Atividade. 8.3. Um peso de $0,5$ kg é atado a uma mola de 1,5 m de comprimento. Na posição de equilíbrio, o comprimento da mola é de 2,48 m. Se o peso for suspenso e solto a partir do repouso de um ponto 2 m acima da posição de equilíbrio, encontre o deslocamento x(t) se é sabido ainda que o meio ambiente oferece resistência numericamente igual à velocidade instantânea. Classifique o sistema em amortecido, sub ou super amortecido. Dê a amplitude desse movimento.

Atividade. 8.4. Uma massa de 2 kg é atada a uma mola cuja constante vale 32 N/m. Uma força igual a $f(t) = 68e^{-2t}\cos 4t$ atua no sistema a partir de $t = 0$. Encontre a equação de movimento na ausência de atrito.

Atividade. 8.5. Uma massa de 0,5 kg é atada a uma mola que tem constante de elasticidade igual a 6 N/m. A massa parte do repouso 2 m abaixo da posição de equilíbrio e o movimento subsequente está sujeito a uma força de amortecimento igual a metade da velocidade instantânea. Encontre a equação de movimento se o peso sofre a ação de uma força externa igual a $f(t) = 10\cos 3t$.

LEITURA COMPLEMENTAR

..

BRAUM, Martin, Differential Equations and their applications. Springer, 1992.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes, Equações Diferenciais Aplicadas. Coleção matemática universitária. IMPA, 2007.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.

8.5 Referências Bibliográficas

KREIDER, KULLER, OSTBERG, Equações Diferenciais, USP, 1972.

ZILL, Dennis G., Equações Diferenciais com aplicações em modelagem. Thomson, 2003.